|  |
| --- |
| Atanasio António Machava  Ermy Melly Raimindo Miambo  Fernando Chau  Rafael Orquidia Mabjaia  Wilma Clara Moamba  Tema: Teste de Optimidade e melhoramento de solução  Universidade Pedagógica de Maputo  Maputo, Agosto de 2025 |

|  |  |
| --- | --- |
| Atanasio Machava  Ermy Melly Raimindo Miambo  Fernando Chau  Rafael Orquidia Mabja  Wilma Clara Moamba  Tema: Teste de Optimidade e melhoramento de solução   |  | | --- | | Trabalho de pesquisa em grupo a ser apresentado na Faculdade de Engenharia e Tecnologia (FET) ao  Docente: Carlos Fumo |   Universidade Pedagógica de Maputo  Maputo, Agosto de 2025 |

Indice

[Introdução 4](#_Toc206251095)

[Teste de Otimalidade e Melhoramento de Solução 7](#_Toc206251096)

[Melhoramento de Solução 7](#_Toc206251097)

[Problema de Maximização (Método Simplex) 8](#_Toc206251098)

[Método das Pedras para o teste de solução 11](#_Toc206251099)

[Método MODI para Teste de Otimalidade em Problemas de Transporte 14](#_Toc206251100)

[Vantagens de Cada Método 17](#_Toc206251101)

[**Conclusão** 18](#_Toc206251102)

[**Bibliografia** 19](#_Toc206251103)

## Introdução

Na investigacao operacional a resolução de problemas de optimização requer não apenas a obtenção de uma solução viável, mas também a verificação de que esta solução é a melhor possível dentro do conjunto de alternativas permitidas. Esse processo de verificação é conhecido como teste de optimidade.

Segundo Hillier e Lieberman (2021, p. 45), "uma solução é considerada ótima quando nenhum movimento dentro do espaço viável pode melhorar a função objetivo". Em outras palavras, alcançar a optimidade significa chegar ao ponto onde qualquer modificação na solução resultaria em um valor igual ou pior do objetivo definido.

Quando o teste de optimidade revela que a solução não é ótima, entra em cena o melhoramento de solução, que consiste na aplicação de técnicas que ajustam ou transformam a solução inicial, aproximando-a da melhor possível.

Esses conceitos são aplicáveis em múltiplos cenários: desde problemas de programação linear (maximização de lucros, minimização de custos) até a teoria dos grafos (encontrar o caminho mais curto, roteamento de veículos), passando por problemas combinatórios complexos.

Historicamente, o estudo da optimidade ganhou destaque com o desenvolvimento dos métodos de Pesquisa Operacional na década de 1940, especialmente com o método Simplex de George Dantzig, que permitiu testar e melhorar soluções de forma sistemática. Atualmente, com o avanço dos algoritmos e da capacidade computacional, o teste de optimidade e o melhoramento de solução são ferramentas indispensáveis em áreas como logística, engenharia, economia e informática.

2. Objetivos

2.1 Objetivo Geral

Estudar e aplicar os conceitos de optimidade e melhoramento de solução em problemas de otimização, utilizando métodos gráficos e tabelares.

2.2.Objetivos Específicos

* Definir o conceito e tipos de optimidade.
* Explicar os critérios e condições de teste de optimidade.
* Apresentar exemplos práticos com uso de tabelas e gráficos.
* Demonstrar métodos de melhoramento de solução.
* Analisar a importância e limitações desses métodos.

3.Metodologia

O presente trabalho foi desenvolvido por meio de pesquisa bibliográfica e aplicativa, utilizando como base livros, apostilas e materiais acadêmicos que abordam os conceitos de otimização, teste de optimalidade e métodos de melhoramento de solução no contexto da programação linear.

Inicialmente, foi feita uma revisão teórica sobre os conceitos de otimalidade e seus tipos, bem como sobre o procedimento para realizar o teste de otimalidade. Em seguida, aplicou-se um exemplo prático, resolvido por meio do método Simplex, com demonstração em tabela e representação gráfica da região viável e do ponto ótimo.

Para o melhoramento de solução, foram utilizadas técnicas iterativas, nas quais, a partir de uma solução inicial viável, buscaram-se soluções melhores até atingir a solução ótima, seguindo os critérios matemáticos do método de otimização escolhido.

Os resultados obtidos foram analisados e discutidos, considerando tanto a eficiência do método quanto suas limitações, permitindo assim compreender de forma prática a aplicação dos conceitos estudados.

### Teste de Otimalidade e Melhoramento de Solução

O teste de otimalidade é um procedimento matemático utilizado em problemas de otimização (como Programação Linear, Transporte e Redes) para verificar se uma solução viável atual é a melhor possível dentro do conjunto de soluções permitidas pelas restrições do problema.

Condições para Otimalidade

* Maximização: Todos os coeficientes das variáveis não básicas na linha da função objetivo (Z) são ≥ 0.
* Minimização: Todos os coeficientes das variáveis não básicas na linha Z são ≤ 0.
* Se essas condições forem atendidas, a solução é ótima. Caso contrário, é necessário aplicar técnicas de melhoramento de solução.

## **Melhoramento de Solução**

O **melhoramento de solução** consiste em um conjunto de técnicas iterativas que ajustam uma solução viável (mas não ótima) para aproximá-la da **solução ótima**.

Métodos Comuns

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Método | Aplicação | Descrição |
| Método Simplex | Programação Linear | Realiza pivotamentos sucessivos até atingir a otimalidade. |
| Stepping Stone(método das pedras) | Problemas de Transporte | Avalia rotas alternativas para reduzir custos. |
| MODI (Modified Distribution) | Transporte/Alocação | Usa multiplicadores (uᵢ, vⱼ) para calcular custos reduzidos. |
| Algoritmos de Busca Local | Otimização Combinatória | Explora vizinhanças da solução atual (ex: Hill Climbing). |

### Problema de Maximização (Método Simplex)

O Método Simplex é um algoritmo matemático eficiente para resolver problemas de Programação Linear, desenvolvido por George Dantzig em 1947. Ele é amplamente utilizado para:

* Maximizar lucros
* Minimizar custos
* Otimizar alocação de recursos

Quando usar?

✔ Problemas com restrições lineares  
✔ Função objetivo linear  
✔ Número razoável de variáveis (até milhares)

Formato Padrão do Problema

Para aplicar o Simplex, o problema deve estar na forma padrão:

Maximizar Z = c₁x₁ + c₂x₂ + ... + cₙxₙ

Sujeito a:

* a₁₁x₁ + a₁₂x₂ + ... + a₁ₙxₙ ≤ b₁
* a₂₁x₁ + a₂₂x₂ + ... + a₂ₙxₙ ≤ b₂
* ...
* x₁, x₂, ..., xₙ ≥ 0

Conversão para Forma Padrão

|  |  |
| --- | --- |
| Caso | Ação |
| Minimização | Multiplicar Z por -1 |
| Restrição ≥ | Adicionar variável de excesso (-s) |
| Restrição = | Adicionar variável artificial (A) |

Passo a Passo do Método Simplex

Passo 1: Montar a Tabela Inicial

* Variáveis de folga (s) para desigualdades ≤
* Coeficientes da função objetivo (Z)
* Termos independentes (RHS)

Exemplo:  
MaxZ=3x₁+5x₂  
Sujeitoa:  
x₁ ≤ 42x₂ ≤ 12  
3x₁ + 2x₂ ≤ 18

Tabela Inicial:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x₁ | x₂ | s₁ | s₂ | s₃ | Solução |
| s₁ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| s₂ | 0 | 2 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| s₃ | 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 18 |
| Z | -3 | -5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Passo 2: Teste de Otimalidade

* Maximização: Se todos coeficientes em Z ≥ 0 → solução ótima
* Minimização: Se todos coeficientes em Z ≤ 0 → solução ótima

No exemplo:  
Z tem -3 e -5 → não é ótima

Passo 3: Escolher Variável Entrante

* Selecionar a variável com coeficiente mais negativo em Z (maior impacto por unidade).  
  No exemplo: x₂ (coeficiente -5)

Passo 4: Escolher Variável Saínte

Calcular a razão (RHS/coeficiente da variável entrante) para linhas com coeficiente > 0:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Linha | Cálculo | Razão |
| s₁ | 4/0 | ∞ |
| s₂ | 12/2 | 6 |
| s₃ | 18/2 | 9 |

Escolher a menor razão não negativa → s₂ sai

Passo 5: Pivotamento

1. Tornar o coeficiente pivô = 1 (linha s₂ ÷ 2)
2. Zerar outros coeficientes da coluna x₂ usando operações lineares

Nova tabela após pivotamento:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Base | x₁ | x₂ | s₁ | s₂ | s₃ | Solução |
| s₁ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| x₂ | 0 | 1 | 0 | 0.5 | 0 | 6 |
| s₃ | 3 | 0 | 0 | -1 | 1 | 6 |
| Z | -3 | 0 | 0 | 2.5 | 0 | 30 |

Passo 6: Repetir até Otimalidade

* Nova variável entrante: x₁ (coeficiente -3 em Z)
* Variável saínte: s₁ (menor razão: 4/1 = 4)
* Pivotar e atualizar tabela até Z ≥ 0

Solução Ótima Final:

* x₁ = 2, x₂ = 6
* Z = 36

Uma solução é optima se todos os multiplicadores do simplex ou precos de sombra das

variveis nao bãsicas no for menor que zero (,0≥δ para minimizaçâo) e rnaior que zero (0≤δ, para maximizaçao).

Uma solução é degenerada, quando o nirnero de células ocupadas for menor do que m + n - 1, Esta situação pode ocorrer tanto na prirneira aproximação como em qualquer estado do

meihoramento da soluçao.

### Método das Pedras para o teste de solução

O Método das Pedras (Stepping Stone) é uma técnica utilizada em problemas de transporte para verificar se uma solução inicial é ótima e, caso não seja, identificar como melhorá-la.

O método proposto por Stepping Stone, consiste em avaliar os custos efectivos das rotas

para eneontrar a rota mais viável do problerna de transporte corn objectivo de meihorar a solucão.

Passos do Método:

1. Partir de uma solução inicial viável (ex: Canto Noroeste, Mínimo Custo).
2. Avaliar células vazias (não alocadas):
   * Para cada célula vazia, traçar um circuito fechado (movimentos em L) usando apenas células ocupadas.
   * Alternar sinais + e - ao longo do circuito.
3. Calcular o custo marginal (Δ):
   * Somar os custos das células com + e subtrair os custos das células com -.
4. Teste de Otimalidade:
   * Se todos Δ ≥ 0 (minimização), a solução é ótima.
   * Se algum Δ < 0, a solução pode ser melhorada alocando unidades na célula vazia com o Δ mais negativo.

Exemplo 1: Problema de Transporte

Dados do Problema

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Origem | Destino A | Destino B | Oferta |
| Fábrica 1 | 4 (custo) | 3 | 30 |
| Fábrica 2 | 2 | 5 | 50 |
| Demanda | 40 | 40 | Total: 80 |

Solução Inicial (Método do Canto Noroeste)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | Oferta |
| F1 | 30 (4) | 0 | 30 |
| F2 | 10 (2) | 40 (5) | 50 |
| Demanda | 40 | 40 |  |

Custo Total:  
30×4+10×2+40×5=120+20+200=34030×4+10×2+40×5=120+20+200=340

Teste de Otimalidade (Método das Pedras)

Avaliar célula vazia F1-B (custo = 3):

* Circuito: F1-B (+) → F2-B (-) → F2-A (+) → F1-A (-)
* Δ = +3 (F1-B) -5 (F2-B) +2 (F2-A) -4 (F1-A) = -4
* Como Δ = -4 < 0, a solução não é ótima.

Melhoramento da Solução

* Alocar 30 unidades em F1-B (menor valor entre F2-B e F1-A).
* Nova alocação:
  + F1-B: 30
  + F2-A: 40
  + F2-B: 10
* Novo custo:  
  30×3+40×2+10×5 = 90+80+50 = 22030×3+40×2+10×5 = 90+80+50 = 220
* (Redução de 120!)

Exemplo 2: Problema Degenerado

Dados do Problema

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Origem | Destino X | Destino Y | Oferta |
| Depósito 1 | 8 | 6 | 10 |
| Depósito 2 | 4 | 2 | 20 |
| Demanda | 15 | 15 | Total: 30 |

Solução Inicial (Método do Mínimo Custo)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | X | Y | Oferta |
| D1 | 0 | 10 (6) | 10 |
| D2 | 15 (4) | 5 (2) | 20 |
| Demanda | 15 | 15 |  |

Custo Total:  
10×6+15×4+5×2 = 60+60+10 = 13010×6+15×4+5×2 = 60+60+10 = 130

Teste de Otimalidade

Avaliar célula vazia D1-X (custo = 8):

* Circuito: D1-X (+) → D2-X (-) → D2-Y (+) → D1-Y (-)
* Δ = +8 -4 +2 -6 = 0
* Como Δ = 0, existem múltiplas soluções ótimas (custo igual).

### Método MODI para Teste de Otimalidade em Problemas de Transporte

O Método MODI (Modified Distribution) é uma técnica eficiente para verificar a otimalidade em problemas de transporte e identificar oportunidades de melhoramento. Ele utiliza multiplicadores (variáveis duais) para calcular os custos reduzidos das rotas não utilizadas, determinando se a solução atual é ótima ou pode ser melhorada.

1. Passos do Método MODI

Passo 1: Obter uma Solução Inicial Viável

* Use métodos como Canto Noroeste, Mínimo Custo ou Vogel para alocar as quantidades iniciais.

Passo 2: Calcular os Multiplicadores (uᵢ e vⱼ)

* Atribua u₁ = 0 (arbitrariamente).
* Para cada célula ocupada (xᵢⱼ > 0), resolva:

ui+vj=cij*ui*​+*vj*​=*cij*​

onde:

* + cij*cij*​ = custo da célula (i,j).
  + ui*ui*​ = multiplicador da linha i.
  + vj*vj*​ = multiplicador da coluna j.

Passo 3: Calcular os Custos Reduzidos (Δᵢⱼ) para Células Vazias

* Para cada célula não ocupada (xᵢⱼ = 0), calcule:

Δij=cij−(ui+vj)Δ*ij*​=*cij*​−(*ui*​+*vj*​)

* + Se todos Δᵢⱼ ≥ 0 → Solução ótima.
  + Se algum Δᵢⱼ < 0 → Melhorar a solução alocando nessa célula.

Passo 4: Melhoramento da Solução (Se Necessário)

* Selecione a célula com o Δᵢⱼ mais negativo.
* Trace um ciclo fechado (como no Stepping Stone) e ajuste as alocações.

Exemplo Prático

Dados do Problema

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Origem | Destino A | Destino B | Oferta |
| Fábrica 1 | 4 | 3 | 30 |
| Fábrica 2 | 2 | 5 | 50 |
| Demanda | 40 | 40 | Total: 80 |

Solução Inicial (Método do Canto Noroeste)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | Oferta |
| F1 | 30 (4) | 0 | 30 |
| F2 | 10 (2) | 40 (5) | 50 |
| Demanda | 40 | 40 |  |

Custo Total: 30×4+10×2+40×5=34030×4+10×2+40×5=340

Aplicação do MODI

Passo 2: Cálculo dos Multiplicadores

* Atribua u₁ = 0 (Fábrica 1).
* Para células ocupadas:
  1. F1-A (4):

u1+v1=4  ⟹  0+v1=4  ⟹  v1=4*u*1​+*v*1​=4⟹0+*v*1​=4⟹*v*1​=4

* 1. F2-A (2):

u2+v1=2  ⟹  u2+4=2  ⟹  u2=−2*u*2​+*v*1​=2⟹*u*2​+4=2⟹*u*2​=−2

* 1. F2-B (5):

u2+v2=5  ⟹  −2+v2=5  ⟹  v2=7*u*2​+*v*2​=5⟹−2+*v*2​=5⟹*v*2​=7

Passo 3: Cálculo dos Custos Reduzidos (Δᵢⱼ)

* Célula F1-B (3):

Δ12=c12−(u1+v2)=3−(0+7)=−4(Melhoria possıˊvel!)Δ12​=*c*12​−(*u*1​+*v*2​)=3−(0+7)=−4(Melhoria possıˊvel!)

Passo 4: Melhoramento da Solução

* Selecione F1-B (Δ = -4) e trace o ciclo:
  + F1-B (+) → F2-B (-) → F2-A (+) → F1-A (-)
* Ajuste as alocações:
  + Mova 30 unidades para F1-B.
  + Nova alocação:
    - F1-B: 30
    - F2-A: 40
    - F2-B: 10
* Novo custo: 30×3+40×2+10×5=22030×3+40×2+10×5=220 (Economia de 120!)

## Vantagens de Cada Método

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Método Simplex | Método MODI | Método Stepping Stone |
| * Aplicável a qualquer problema de programação linear (não apenas transporte) * Lida com restrições de ≤, ≥ e = * Fornece preços-sombra e intervalos de otimalidade * Versões revisadas são eficientes para problemas com milhares de variáveis | * Requer menos cálculos que Stepping Stone (usa multiplicadores) * Requer menos cálculos que Stepping Stone (usa multiplicadores) * Requer menos cálculos que Stepping Stone (usa multiplicadores) | * Fácil compreensão visual dos circuitos de melhoria * Ideal para aprendizado conceitual * Eficaz para problemas de transporte pequenos (até 5×5) |

Diferenças

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Método Simplex | Método MODI | Método Stepping Stone |
| * Transforma restrições em igualdades * Realiza trocas de base iterativamente | * Calcula multiplicadores para linhas/colunas * Deriva custos reduzidos sem traçar ciclos | * Traça ciclos fechados para células vazias * Calcula custos marginais (Δ) |

## **Conclusão**

O estudo da otimalidade e do melhoramento de soluções é fundamental na programação linear e em métodos como o Simplex, pois garante que o processo de tomada de decisão seja baseado em soluções eficientes e bem fundamentadas.

O **teste de otimalidade** permite verificar se a solução obtida é realmente a melhor possível dentro da região viável, evitando decisões equivocadas e desperdício de recursos. Já **o melhoramento de solução** atua como uma estratégia prática para, a partir de uma solução viável inicial, buscar ajustes e aprimoramentos que conduzam ao ponto ótimo.

Com a aplicação conjunta desses conceitos, o processo de resolução de problemas de otimização se torna mais estruturado, preciso e eficiente. Apesar das limitações, como a dependência de modelos matemáticos adequados e a necessidade de dados confiáveis, a metodologia garante resultados consistentes e aplicáveis em diversas áreas, como logística, economia, produção e gestão de recursos.

Assim, compreender e aplicar corretamente essas técnicas é essencial para quem deseja alcançar o melhor desempenho possível na resolução de problemas de otimização.

## **Bibliografia**

* HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. *Introdução à Pesquisa Operacional*. McGraw-Hill, 2013.
* TAHA, H. A. *Pesquisa Operacional*. Pearson, 2011.
* WINSTON, W. L. *Operations Research: Applications and Algorithms*. Cengage Learning, 2014.